АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
«ЯКУТСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

Одобрено на заседании
Педагогического совета
протокол № 5 от 28.04.2025 г.

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по учебной работе
____________ А.Д. Рабинович

Рабочая программа дисциплины

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

По специальности среднего профессионального образования
09.02.07 Информационные системы и программирование
Уровень образования: основное общее образование, среднее общее образование
Форма обучения: очная

Якутск, 2025

1. ПАСПОРТ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дискретная математика

1.1. Область применения программы

Программа учебной дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы по специальностям среднего профессионального образования (далее – СПО) 09.02.07 «Информационные системы и программирование» (очная форма) , квалификация «Программист» базовой подготовки.

1.2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы:

Дисциплина «Дискретная математика» является обязательной частью математического и общего естественнонаучного учебного цикла образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

1.3. Цели и задачи учебной дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:

Целью изучения дисциплины «Дискретная математика» является формирование представлений об основных понятиях и методах дискретной математики.

Основные задачи:

- овладение знаниями и умениями, необходимые для решения задач профессиональной деятельности;

- понимание математического языка;

- формирование математического мышления.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

В результате освоения дисциплины «Информационные технологии в профессиональной деятельности» обучающийся должен:

уметь:

- применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики;
- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

знать:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
- формулы алгебры высказываний;
- методы минимизации алгебраических преобразований;
- основы языка и алгебры предикатов;
- основные принципы теории множеств.

1.4. Рекомендуемое количество часов на освоение учебной дисциплины:

максимальной учебной нагрузки обучающегося 48 часов, в том числе:

- обязательной аудиторной учебной нагрузки обучающегося 46 часов; из них 32 часов – лекции, 14 часов – практические занятия, 2 часа – самостоятельная работа.

Форма контроля – дифференцированный зачет.

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	**Количество часов**
Максимальная учебная нагрузка (всего)	*48*
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	*46*
в том числе:	
лабораторные занятия	*0*
практические занятия	*14*
контрольные работы	*0*
курсовая работа (проект) (*если предусмотрено)*	*0*
Самостоятельная работа обучающегося (всего)	*2*
Итоговая аттестация в форме дифференцированного зачета	

2.2. Примерный тематический план и содержание учебной дисциплины «Дискретная математика»

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работ (проект) *(если предусмотрены)*	Количество часов	Уровень освоения
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 1. Основы математической логики.			
Тема 1.1. Алгебра высказываний.	Содержание учебного материала		
	Понятие высказывания. Основные логические операции. Формулы логики. Таблица истинности и методика её построения. Законы логики. Равносильные преобразования.	*6*	*1,2,3*
	Лабораторные занятия		
	Практические занятия 1. Построение таблиц истинности, преобразование логических функций. 2. Доказательство теорем алгебры логики.	 *1* *1*	
	Контрольные работы		
	Самостоятельная работа обучающихся		
Тема 1.2. Булевы функции.	Содержание учебного материала		*1,2,3*
	Понятие булевой функции. Способы задания ДНФ, КНФ. Операция двоичного сложения и её свойства. Полином Жегалкина. Основные классы функций. Полнота множества. Теорема Поста.	*6*	
	Лабораторные занятия		
	Практические занятия 1. Построение совершенных и нормальных форм функций по таблицам истинности. 2. Составление МКНФ и МДНФ функций. 3. Минимизация сложных логических функций по картам Карно.	 *1* *1* *2*	
	Контрольные работы		
	Самостоятельная работа обучающихся		
Раздел 2. Элементы теории			

множеств.			
Тема 2.1. Основы теории множеств.	Содержание учебного материала		
	Общие понятия теории множеств. Способы задания. Основные операции над множествами и их свойства. Мощность множеств. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна. Декартово произведение множеств. Отношения. Бинарные отношения и их свойства. Теория отображений. Алгебра подстановок.	*8*	*1,2,3*
	Лабораторные занятия		
	Практические занятия 1. Решение задач и уравнений с множествами. 2. Сравнение множеств.	 *1* *1*	
	Контрольные работы		
	Самостоятельная работа обучающихся	*1*	
Раздел 3. Логика предикатов.			
Тема 3.1. Теория предикатов.	Содержание учебного материала	*6*	*1,2,3*
	Понятие предиката. Логические операции над предикатами. Кванторы существования и общности. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции.		
	Лабораторные занятия		
	Практические занятия 1. Логика предикатов. Исчисления предикатов. 2. Нахождение области определения и истинности предиката. 3. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции.	 *1* *1* *2*	
	Контрольные работы		
	Самостоятельная работа обучающихся		
Раздел 4. Элементы теории графов.			
Тема 4.1.	Содержание учебного материала		

	Основные понятия теории графов. Виды графов: ориентированные и неориентированные графы. Способы задания графов. Матрицы смежности и инциденций для графа. Эйлеровы и гамильтоновы графы. Деревья.		*1,2,3*
	Лабораторные занятия		
	Практические занятия 1. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов. 2. Построение графов. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов.	*1* *1*	
	Контрольные работы		
	Самостоятельная работа обучающихся	*1*	
	Всего:	*48*	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:

1. – ознакомительный (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – репродуктивный (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)
3. – продуктивный (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач)

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Требования к материально-техническому обеспечению

Перечень основного оборудования, учебно-наглядных пособий:

- комплект мебели для обучающихся (стол ученический – 6, стул ученический – 12);
- маркерная доска – 1,
- автоматизированные рабочие места на 16 обучающихся (Мини ПК DEXP MINI ENTRY (Intel N100, 8 ГБ DDR4, SSD 256 ГБ, Windows 11 Pro, 2 x HDMI, Wi-Fi, Bluetooth, SoC, блок питания – 36) Монитор, клавиатура, компьютерная мышь, доступ в интернет,
- автоматизированное рабочее место преподавателя – 1 (Мини ПК DEXP MINI ENTRY (Intel N100, 8 ГБ DDR4, SSD 256 ГБ, Windows 11 Pro, 2 x HDMI, Wi-Fi, Bluetooth, SoC, блок питания – 36) Монитор, клавиатура, компьютерная мышь, доступ в интернет, МФУ Canon imageCLASS MF3010 A4, 18 стр./мин, 64 Мб,1200x600 dpi, USB, лоток 150 л. 5252B008 / 5252B011 / 5252B007)
- сервер (удаленно),
- мультимедиа-проектор – 1,
- экран настенный -1,
- комплект учебников (учебных пособий),
- жалюзи – 3,
- доступ в интернет – 16
- комплект наглядных пособий по предметам учебного плана;
- облучатель - рециркулятор бактерицидный для обеззораживания воздуха «AirRec»;
- программное обеспечение:

Пакет программ MicrosoftOffice **(Microsoft Word, Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint, Microsoft Outlook, Microsoft Access, Microsoft OneNote, Microsoft Teams);**

3.2. Информационное обеспечение обучения

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Для реализации программы библиотечный фонд образовательной организации должен иметь печатные и/или электронные образовательные и информационные ресурсы для использования в образовательном процессе. При формировании библиотечного фонда образовательной организации выбирается не менее одного издания из перечисленных ниже печатных изданий и (или) электронных изданий в качестве основного, при этом список может быть дополнен новыми изданиями

Основные источники:

1. учебно-методическое пособие : [16+] / сост. Н. Ю. Шабанова, О. А. Ефремова, А. Д. Михед. – Москва : Директ-Медиа, 2025. – 252 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=720309 . – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-4499-5111-3. – DOI 10.23681/720309. – Текст : электронный.

Дополнительная литература:

1. Новиков, А. И. Элементы дискретной математики : учебное пособие / А. И. Новиков. – 5-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2025. – 210 с. : ил., табл. – (Учебные издания для вузов). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=720381 .– Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-06154-7. – Текст : электронный
2. Черняева, С. Н. Дискретная математика в программировании : практикум : учебное пособие : [16+] / С. Н. Черняева, Л. А. Коробова, И. С. Толстова ; науч. ред. Д. В. Арапов ; Воронежский государственный университет инженерных технологий. – Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2023. – 61 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=712741 . – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-00032-623-7. – Текст : электронный.
3. Окулов, С. М. Дискретная математика: теория и практика решения задач по информатике : учебное пособие : [12+] / С. М. Окулов. – 4-е изд. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 425 с. : ил. – (Педагогическое образование). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222848 . – Библиогр.: с. 414-415. – ISBN 978-5-00101-684-7. – Текст : электронный.
4. Иванисова, О. В. Дискретная математика и математическая логика : учебное пособие : [16+] / О. В. Иванисова, И. В. Сухан. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 354 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600488 . – ISBN 978-5-4499-1729-4. – DOI 10.23681/600488. – Текст : электронный

4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Образовательное учреждение, реализующее подготовку по учебной дисциплине, обеспечивает организацию и проведение промежуточной аттестации и текущего контроля индивидуальных образовательных достижений – демонстрируемых обучающимися знаний, умений и навыков.

Текущий контроль проводится преподавателем в процессе проведения практических занятий и лабораторных работ, тестирования, а также выполнения обучающимися индивидуальных заданий, проектов, исследований.

Обучение по учебной дисциплине завершается промежуточной аттестацией, которую проводит экзаменационная комиссия. В состав экзаменационной комиссии могут входить представители общественных организаций обучающихся.

Формы и методы промежуточной аттестации и текущего контроля по учебной дисциплине самостоятельно разрабатываются образовательным учреждением и доводятся до сведения обучающихся не позднее начала двух месяцев от начала обучения.

Для промежуточной аттестации и текущего контроля образовательными учреждениями создаются фонды оценочных средств (ФОС).

ФОС включают в себя педагогические контрольно-измерительные материалы, предназначенные для определения соответствия (или несоответствия) индивидуальных образовательных достижений основным показателям результатов подготовки (таблицы).

Раздел учебной дисциплины	**Результаты** (освоенные умения, усвоенные знания)	**Основные показатели результатов подготовки**	**Формы и методы контроля**
№1 «Основы математической логики»	Знать: Основные принципы математической логики, формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; Уметь: Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики. Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.	*Демонстрирует знания: Основных принципов математической логики, формул алгебры высказываний, методов минимизации алгебраических преобразований; Демонстрирует умения: Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики. Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.*	*Тест Экспертное наблюдение выполнения самостоятельных работ.*
№2 «Элементы теории множеств»	Знать: Основные принципы теории множеств и теории алгоритмов; Уметь: Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики. Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.	*Демонстрирует знания: Основных принципов теории множеств и теории алгоритмов; Демонстрирует умения: Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики. Формулировать задачи логического характера и применять средства*	*Экспертное наблюдение выполнения практических работ.*

		математической логики для их решения.	
№3 «Логика предикатов»	Знать: Основы языка и алгебры предикатов; Уметь: Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики. Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.	*Демонстрирует знания: Основ языка и алгебры предикатов; Демонстрирует умения: Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики. Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.*	*Тест Экспертное наблюдение выполнения самостоятельных работ.*
№4 «Элементы теории графов»	Знать: Основные принципы терии графов; Уметь: Решать логические задачи с помощью графов.	*Демонстрирует знания: Основных принципов терии графов; Демонстрирует умения: Решать логические задачи с помощью графов.*	*Экспертное наблюдение выполнения практических работ.*

Оценка индивидуальных образовательных достижений по результатам текущего контроля производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	**Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений**	
	балл (отметка)	**вербальный аналог**
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно

На этапе промежуточной аттестации по медиане качественных оценок индивидуальных образовательных достижений экзаменационной комиссией определяется интегральная оценка освоенных обучающимися профессиональных и общих компетенций как результатов освоения учебной дисциплины.

Правила определения основных показателей результатов подготовки:

1. Основные показатели результатов подготовки должны вытекать из профессиональных (общих) компетенций как результат выполнения действий.

2. Основные показатели результатов подготовки могут отражать как комплексный результат деятельности (характеризующий целостный опыт деятельности), так и элементарный результат выполнения отдельный действий и/или операций

3. Дескриптор основного показателя результата подготовки формулируются с помощью отглагольных существительных, стоящих вначале предложения.

4. Формулировка дескриптора основного показателя результата подготовки должна быть:

a. ясной и понятной: использование доступных понятий, учет понимания их значений в контексте деятельности; простые предложения и стиль изложения, в то же время не обедняющие языковой опыт обучающихся; логичность (последовательность, непротиворечивость);

b. четкой и конкретной, способствующей однозначному пониманию качественных и количественных характеристик результата деятельности.

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине

п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции (или её части)	Наименование оценочного средства
	Основы математической логики.	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09.	*Практические задания*
	Элементы теории множеств.	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09.	*Практические задания* *Самостоятельная работа*
	Логика предикатов.	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09.	*Практические задания*
	Элементы теории графов.	ОК 01, ОК 02, ОК 04, ОК 05, ОК 09.	*Практические задания* *Самостоятельная работа*

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы

5.2.1. Типовые практические задания

Тема 1.1. Алгебра высказываний.

Задача 1.

С помощью тождественных преобразований максимально упростить следующее логическое выражение:

$$\bar{C} \vee (A \& C) \vee \overline{(A \vee C \vee \bar{B})}$$

Решение:

Максимально упростить, это значит довести выражение до такого вида, когда невозможно применить ни один из законов алгебры логики, которые сокращают длину выражения.

Для того, чтобы не запутаться, можно использовать общую стратегию упрощения логических выражений.

1) Избавиться от операций импликации.

2) Продвинуть отрицание вглубь выражения. То есть применять законы де Моргана, и закон двойного отрицания пока знак отрицания не будет стоять только над переменными (но не над операциями).

После пункта 2 наступает относительная свобода действий. Можно использовать тождества поглощения или раскрывать скобки.

В нашей задаче операция импликации отсутствует, поэтому первый пункт мы пропускаем. Переходим к пункту 2. Применяем два раза второй закон де Моргана (для дизъюнкции) и закон двойного отрицания к правой скобке и получаем следующее логическое выражение:

$$\bar{C} \vee (A \& C) \vee (\bar{A} \& \bar{C} \& B)$$

Если теперь внимательно посмотреть на выражение, то очевидно, что к первому и третьему слагаемому можно применить первый закон поглощения, так как отрицание переменной $\bar{C}$ является первым слагаемым и входит в третье в качестве множителя.

Поскольку дизъюнкцию ещё называют логическим сложением, её операнды называют слагаемыми, аналогично конъюнкция – это логическое умножение, и её операнды называют множителями.

После применения первого закона поглощения получается следующее логическое выражение:

$$\bar{C} \vee (A \& C)$$

Применим второй (нестандартный для алгебры) закон дистрибутивности. Получаем:

$$(\bar{C} \vee A) \& (\bar{C} \vee C)$$

Ко второй скобке применяем закон исключённого третьего, превращаем её в единицу, а затем применяем закон поглощения константы `1` и в итоге получаем выражение:

$\bar{C} \vee A$, которое упростить уже нельзя.

Для лучшего понимания, рекомендуется выписать исходное логическое выражение, последовательно применить к нему все описанные действия и сравнить свой результат с приведённым в конце решения задачи.

Обратите внимание, что исходное логическое выражение зависело от трёх переменных (`A, B, C`) , в то время как упрощённое в итоге зависит от двух логических переменных (`A` и `C`). При этом выражения всё равно остаются равносильными! Это происходит потому, что в процессе упрощения применялись законы поглощения. Аналогичный результат мог бы получиться, если в процессе упрощения выражения используются законы поглощения переменных константами. Исчезновение переменной при упрощении означает, что в исходном выражении она является несущественной.

Задача 2.

Укажите значения переменных `K`, `L`, `M`, `N`, при которых логическое выражение

$(L \vee M) \wedge (\bar{K} \to M) \wedge \bar{N} \wedge \bar{M}$ истинно.

Решение:

Будем следовать стратегии, описанной в предыдущем примере. Первым делом избавляемся от операции импликации. Получаем следующее выражение:

$$(L \vee M) \wedge (K \vee M) \wedge \bar{N} \wedge \bar{M}$$

Отрицание вглубь продвигать не надо. Теперь раскроем скобки. Для упрощения условимся операцию конъюнкции никак не обозначать (по аналогии с алгеброй чисел).

$$(LK \vee LM \vee MK \vee M)(\bar{N})(\bar{M})$$

В первой скобке можно применить тождество поглощения, и «съесть» второе и третье слагаемое, которые содержат M в качестве множителя. Получается такое выражение:

$$(LK \vee M))(\bar{N})(\bar{M})$$

Выполнив оставшиеся операции умножения, получим следующий результат:

$$LK \vee M\bar{N}\bar{M}$$

Получили одну конъюнкцию. Следовательно, существует всего один набор значений переменных, при котором получится значение «1»: `L=1`, `K=1`, `N=0`, `M=0`.

Задача 3.

Пусть P, Q и R – определенные следующим образом высказывания:

P: Я умираю от жажды.

Q: Мой стакан пуст.

R: Сейчас три часа.

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, включающее P, Q и R.

а) Я умираю от жажды и мой стакан пуст.

б) Сейчас три часа, а я умираю от жажды.

в) Если сейчас три часа, то я умираю от жажды.

г) Если я умираю от жажды, то мой стакан пуст.

д) Если я не умираю от жажды, то мой стакан не пуст.

Решение:

а) P и (не Q)

б) R и P

в) R ⇒ P

г) P ⇒ Q

д) (не P) ⇒ (не Q)

Задача 4.

Обозначим через P высказывание: «розы красные», а через Q – «фиалки синие».Запишите каждое из высказываний:

а) если розы не красные, то фиалки не синие;

б) розы красные или фиалки не синие;

в) либо розы красные, либо фиалки синие (но не одновременно)

как логическое выражение.

Используя таблицы истинности, докажите логическую эквивалентность а) и б).

Решение:

а) (не P) ⇒ (не Q).

б) P или (не Q).

в) (P или Q) и (не (P и Q)).

P	Q	**не** P	**не** Q	P **или** (**не** Q)	((**не** P) $\Rightarrow$ (**не** Q))
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних таблицы идентичны, высказывания а) и б) логически эквивалентны.

Задача 5.

Составные высказывания, принимающие истинные значения при любых истинностных значениях своих компонент, называются тавтологиями. С помощью таблиц истинности найдите тавтологии среди следующих высказываний:

а) (не P) ⇒ (не Q).

б) P ⇒ (не P);

в) (P и (P⇒Q)) ⇒Q.

Решение:

P	**не** P	P **и** (**не** P)	**не** (P **и** (**не** P))	$P \Rightarrow$ **не** P
И	Л	Л	И	Л
Л	И	Л	И	И

P	Q	$P \Rightarrow Q$	P **и** $(P \Rightarrow Q)$	(P **и** $(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	И

Из таблиц следует, что высказывания а) и б) - тавтологии.

Задача 6.

Покажите, что высказывание $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ логически эквивалентно высказыванию $((\textbf{не } P) \Rightarrow R)$ **и** $(Q \Rightarrow R)$.

Решение:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	(**не** P) $\Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	((**не** P) $\Rightarrow R$) **и** $(Q \Rightarrow R)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	Л	Л
И	Л	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	Л	И	Л	Л

Мы видим, что последние два столбца таблицы идентичны. Это означает, что высказывания $\left((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\right)$ и $\left(((\textbf{не } P) \Rightarrow R) \textbf{ и } (Q \Rightarrow R)\right)$ логически эквивалентны.

Задача 7.

Что можно сказать об истинности составного высказывания «луна делается из зеленого сыра и Генрих VIII имел шесть жен, или не верно, что дронт вымер»?

Решение:

Обозначим через P высказывание «луна делается из зеленого сыра», через Q – «Генрих VIII имел шесть жен» и через R – «дронт вымер». Символьная запись данного высказывания имеет вид: (P и Q) или (не R). Известно, что высказывание P ложно, а Q и R истинны. Поэтому высказывания (P и Q) или (не R) имеет такое истинностное значение: (Л и И) или Л, что эквивалентно Л.

Задача 8.

Показать, что высказывание $(\textbf{не }(P \textbf{ и } (\textbf{не } Q)))$ логически эквивалентно утверждению $((\textbf{не } P) \textbf{ или } Q)$.

Решение:

Заполним совместную таблицу истинности для составных высказываний:
$R = (\textbf{не }(P \textbf{ и } (\textbf{не } Q)))$ и $S = ((\textbf{не } P) \textbf{ или } Q)$.

P	Q	не P	не Q	P и (не Q)	R	S
И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание R логически эквивалентно высказыванию S.

Задача 9.

Пусть P – (ложное) высказывание 1=5, Q – (тоже ложное) высказывание 3=7 и R – (истинное) утверждение 4=4. Показать, что условные высказывания: «если P, то Q» и «если P, то R» - оба истинны.

Решение:

Если 1=5, то прибавляя 2 к обеим частям равенства, мы получим, что 3=7. Следовательно, высказывание «если P, то Q» справедливо. Вычтем теперь из обеих частей равенства 1=5 число 3 и придем к -2=2. Поэтому $(-2)^2=2^2$, т.е. 4=4. Таким образом, «если P, то R» тоже верно.

Задача 10.

Показать, что высказывание $((\textbf{не } Q) \Rightarrow (\textbf{не } P))$ логически эквивалентно высказыванию $(P \Rightarrow Q)$.

Решение:

P	Q	не P	не Q	$(P \Rightarrow Q)$	((не Q) $\Rightarrow$ (не P))
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания логически эквивалентны.

Тема 1.2. Булевы функции.

Задача 1.

Докажите закон дистрибутивности: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Решение:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Поскольку два последних столбца таблицы полностью совпадают, булевы выражения $p \wedge (q \vee r)$ **и** $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ эквивалентны.

Задача 2.

Покажите, что булево выражение $\overline{(\bar{p} \wedge q)} \wedge (p \vee q)$ эквивалентно p.

Решение:

Сделаем несложные преобразования.

$$
\begin{aligned}
\overline{(\bar{p} \wedge q)} \wedge (p \vee q) &= \left(\overline{(\bar{p})} \vee \bar{q}\right) \wedge (p \vee q) = && \text{(закон де Моргана)} \\
&= (p \vee \bar{q}) \wedge (p \vee q) = && \text{(так как } \overline{(\bar{p})} = p\text{)} \\
&= p \vee (\bar{q} \wedge q) = && \text{(закон дистрибутивности)} \\
&= p \vee 0 = && \text{(так как } \bar{q} \wedge q = 0\text{)} \\
&= p && \text{(по определению } \vee\text{)}
\end{aligned}
$$

Задача 3.

Объясните, каким образом любой минтерм можно записать в виде элементарной конъюнкции, т.е. как конъюнкцию переменных p_i или их отрицаний. $m(p_1, p_2, \ldots, p_r)$

Решение:

Пусть $m(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ – минтерм. Тогда в последнем столбце таблицы истинности функции m будет стоять только одна единица. Возьмем строку таблицы истинности, последний символ в которой – 1. Если в этой строке переменная p_i=1, то в элементарной конъюнкции, представляющей функцию m, участвует p_i; а если p_i=0, то участвует $\bar{p}_i$.

Теперь, используя элементарные конъюнкции, мы запишем произвольную булеву функцию как дизъюнкцию синтермов. Более того, можно доказать, что такая запись для каждой функции определена единственным образом с точностью до перестановки элементарных конъюнкций.

Рассмотрим юулеву функцию трех переменных $f(p,q,r)$, чья таблице дана ниже. Единицы последнего столбца в этой таблице соответствуют трем минтермам:

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r, \qquad \bar{p} \wedge q \wedge r, \qquad p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}.$$

Таблица истинности функции f может быть получена наложением таблиц истинности выписанных минтермов.

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Поскольку дизъюнкция с 1 «поглощает» все нули (иными словами $f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_s$ равно 1 тогда и только тогда, когда среди значений f_i найдется хотя бы одна 1), то наша функция f равна дизъюнкции трех минтермов:

$$f(p, q, r) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}).$$

Это и есть нормальная дизъюнктивная форма функции f. Очевидно, в той же форме можно записать произвольную булеву функцию с любым числом переиенных.

Задача 4.

Найдите дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $f = (p \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge r)$.

Решение:

В таблице запишем истинности функции f.

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Выпишем минтермы:

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r, \qquad p \wedge \bar{q} \wedge r, \qquad p \wedge q \wedge \bar{r}, \qquad p \wedge q \wedge r.$$

Следовательно, искомая дизъюнктивная нормальная форма:

$$f(p, q, r) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Задача 5.

Функция **НЕ-И** определяется формулой: $p \ \textbf{НЕ–И}\ q = \overline{(p \wedge q)}$.

Покажите, что {**НЕ-И**} – полная система функций.

Решение:

Для решения задачи достаточно показать, что каждая из функций $\bar{p}$, $p \vee q$ и $p \wedge q$ может быть выражена через **НЕ-И.**

В виду закона идемпотентости

$$\bar{p} = \overline{(p \wedge p)} = p \ \textbf{НЕ–И}\ p.$$

По закону де Моргана

$$p \vee q = \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})} = \overline{\left((p \ \textbf{НЕ–И}\ p) \wedge (q \ \textbf{НЕ–И}\ q)\right)} = $$
$$= (p \ \textbf{НЕ–И}\ p) \ \textbf{НЕ–И}\ (q \ \textbf{НЕ–И}\ q).$$

Наконец,

$$p \wedge q = \overline{\overline{(p \wedge q)}} = \overline{(p \ \textbf{НЕ–И}\ q)} =$$
$$= (p \ \textbf{НЕ–И}\ q) \ \textbf{НЕ–И}\ (p \ \textbf{НЕ–И}\ q).$$

Итак, {**НЕ-И**} – действительно полная система операций.

Задача 6.

Упростите булево выражение $pqr \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r}$.

Решение:

Обратим внимание на карту Карно выражения $pqr \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r}$.

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1	1		
$\bar{r}$	1	1	1	

Из нее следует, что в данном выражении есть группа из четырех минтермов:

$$pqr \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r},$$

Которую мы обозначим через (А), и группа из двух минтермов: $\bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$.
Ее мы обозначим через (Б).
Сначала поработаем над группой (А).

$$pqr \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} = (p \vee \bar{p})qr \vee (p \vee \bar{p})q\bar{r} =$$
$$= qr \vee q\bar{r} = q(r \vee \bar{r}) = q.$$

Теперь займемся группой (Б).

$$\bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} = \bar{p}\bar{r}(q \vee \bar{q}) = \bar{p}\bar{r}.$$

Таким образом, исходное выражение упрощается до $q \vee \bar{p}\bar{r}$.

Задача 7.

Упростите булеву функцию $f(p, q, r) = \left(\overline{(p \vee q)} \wedge r\right) \vee \overline{(q \vee r)}$.

Решение:

Заполним таблицу истинности функции *f*

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

По таблице строим дизъюнктивную нормальную форму функции *f*: $\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$.

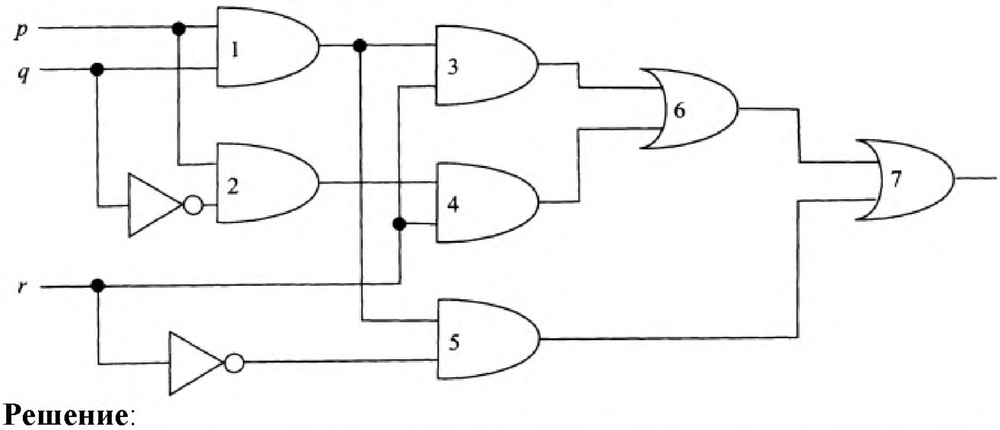
Ее карта Карно будет

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r			1	
$\bar{r}$			1	1

Из карты Карно видно, что в нашем выражении присутствуют две пары минтермов для группировки: $\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$ и $\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee p\bar{q}\bar{r}$. После их упрощения получаются функции: $\bar{p}\bar{q}$ и $\bar{q}\bar{r}$. Следовательно, исходная функция сводится к выражению $\bar{p}\bar{q} \vee \bar{q}\bar{r}$.

Задача 8.

Что получится на выходе функциональной схемы



Решение:

В таблице перечислены входы и соответствующие выходы для каждого функционального элемента в соответствии с нумерацией

Вентиль	Вход	Выход
1	$p,\ q$	pq
2	$p,\ \bar{q}$	$p\bar{q}$
3	$pq,\ r$	pqr
4	$p\bar{q}, r$	$p\bar{q}r$
5	$pq,\ \bar{r}$	$pq\bar{r}$
6	$pqr,\ p\bar{q}r$	$pqr \vee p\bar{q}r$
7	$pqr \vee p\bar{q}r,\ pq\bar{r}$	$pqr \vee p\bar{q}r \vee pq\bar{r}$

Таким образом, на выходе схемы получится функция $pqr \vee p\bar{q}r \vee pq\bar{r}$.

Задача 9.

Упростите функцию, генерируемую схемой из задачи 8 и найдите более простую функциональную схему, ее реализующую.

Решение:

Карта Карно требуемого выражения будет

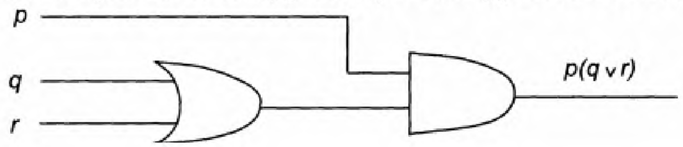
	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1			1
$\bar{r}$	1			

Она имеет две пары минтермов для группировки (одна из них не видна при данном обозначении столбцов).

Итак, $pqr \vee pq\bar{r} = pq(r \vee \bar{r}) = pq$ и $pqr \vee p\bar{q}r = (q \vee \bar{q})pr = pr$.

Это сводит функцию к выражению $pq \vee pr$, которое, ввиду дистрибутивности, редуцируется к функции $p(q \vee r)$.

Более простая схема, реализующая функцию из задачи 8 будет



Задача 10.

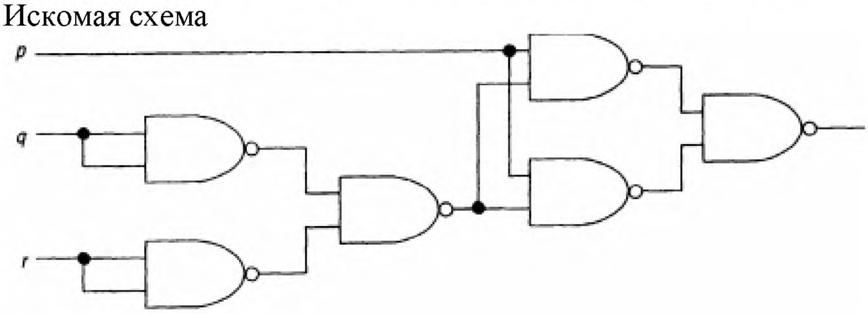
Начертите функциональную схему, реализующую булеву функцию $p(q \vee r)$, используя только **НЕ-И**.

Решение:

Во-первых, заметим, что $p(q \vee r) = (p$ **НЕ–И** $(q \vee r))$ **НЕ–И** $(p$ **НЕ–И** $(q \vee r))$.

А во-вторых, $q \vee r = (q$ **НЕ–И** $q)$ **НЕ–И** $(r$ **НЕ–И** $r)$.

Искомая схема



Задача 11.

Заполняя подходящие таблицы истинности, докажите законы де Моргана.

Решение:

p	q	$\bar p$	$\bar q$	$p \vee q$	$\bar p \wedge \bar q$	$\overline{(p \vee q)}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

p	q	$\bar p$	$\bar q$	$p \wedge q$	$\bar p \vee \bar q$	$\overline{(p \wedge q)}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Это таблицы истинности булевых выражений, участвующих в законах де Моргана. Последние два столбца в каждой из таблиц одинаковы. Значит, законы де Моргана справедливы.

Задача 12.

Опираясь на законы булевой алгебры, проверьте соотношения:

а) $\overline{(p \wedge \bar q)} \vee \bar r = \bar p \vee q \vee \bar r$;

б) $\overline{((p \wedge \bar q) \wedge (r \vee (p \wedge \bar q)))} = \bar p \vee q.$

Решение:

а) Опираясь на законы де Моргана, законы ассоциативности и тот факт, что $\overline{(\bar q)} = q$, получаем $\overline{(p \wedge \bar q)} \vee \bar r = (\bar p \vee q) \vee \bar r = \bar p \vee q \vee \bar r.$

б) Опираясь на законы де Моргана, дистрибутивности, идемпотентности и поглощения, имеем

$$\overline{((p \wedge \bar q) \wedge (r \vee (p \wedge \bar q)))} = \overline{(p \wedge \bar q)} \vee \overline{(r \vee (p \wedge \bar q))} = (\bar p \vee q) \vee (\bar r \wedge \overline{(p \wedge \bar q)}) =$$
$$(\bar p \vee q) \vee (\bar r \wedge (\bar p \vee q)) = ((\bar p \vee q) \vee \bar r) \wedge (\bar p \vee q) = \bar p \vee q.$$

Задача 13.

Найдите дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $g(p, q, r, s)$ с таблицей

p	q	r	s	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Решение:

$\bar p\bar q\bar r s \vee \bar p\bar q r\bar s \vee p\bar q r s \vee pq\bar r s.$

Задача 14.

Заполните таблицу истинности булева выражения $(p \wedge (\bar q \vee r)) \vee (\bar p \wedge (q \vee \bar r))$ и найдите его дизъюнктивную нормальную форму.

Решение:

Пусть $f = (p \wedge (\bar q \vee r)) \vee (\bar p \wedge (q \vee \bar r))$.

Таблица истинности функции *f* представлена в таблице

p	q	r	$\bar q \vee r$	$q \vee \bar r$	$p \wedge (\bar q \vee r)$	$\bar p \wedge (q \vee \bar r)$	f
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

По таблице можно написать дизъюнктивную нормальную форму:

$$f = \bar p\bar q\bar r \vee \bar p q\bar r \vee \bar p q r \vee p\bar q\bar r \vee p\bar q r \vee pqr.$$

Задача 15.

Запишите выражение $(p \wedge \bar q) \wedge r$, используя только:

а) операции $\vee$ **и** $^{-}$;

б) функцию **НЕ-И**.

Решение:

а) $(p \wedge \bar q) \wedge r = \overline{\left(\overline{((p \wedge \bar q) \wedge r)}\right)} = \overline{\left(\overline{(p \wedge \bar q)} \vee \bar r\right)} = \overline{((\bar p \vee q) \vee \bar r)} = \overline{(\bar p \vee q \vee \bar r)}.$

б) $(p \wedge \bar q) \wedge r = (p \wedge (q \textbf{ НЕ–И } q)) \wedge r = \Big((p \wedge (q \textbf{ НЕ–И } q)) \textbf{ НЕ–И } r\Big) \textbf{ НЕ–И}$

$$\textbf{НЕ–И } \Big((p \wedge (q \textbf{ НЕ–И } q)) \textbf{ НЕ–И } r\Big) = \Big[\Big((p \textbf{ НЕ–И } (q \textbf{ НЕ–И } q)) \textbf{ НЕ–И}$$

$$\textbf{НЕ–И}\ \big(p\ \textbf{НЕ–И}\ (q\ \textbf{НЕ–И}\ q)\big)\Big)\ \textbf{НЕ–И}\ r\Big|\ \textbf{НЕ–И}$$
$$\textbf{НЕ–И}\ \Big[\Big(\big(p\ \textbf{НЕ–И}\ (q\ \textbf{НЕ–И}\ q)\big)\ \textbf{НЕ–И}$$
$$\textbf{НЕ–И}\ \big(p\ \textbf{НЕ–И}\ (q\ \textbf{НЕ–И}\ q)\big)\Big)\ \textbf{НЕ–И}\ r\Big].$$

Задача 16.

Булева функция **НЕ-ИЛИ** определяется по формуле $p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ q = \overline{(p \vee q)}$.
Покажите, что {**НЕ-ИЛИ**} является полной системой функций**.**

Решение:

Для решения задачи нам достаточно выразить функции $\bar{p}$, $p \vee q$ и $p \wedge q$ через $p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ q$. Сделаем это.

$$\bar{p} = \overline{(p \vee p)} = p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ p;$$
$$p \vee q = \overline{\overline{((p \vee q))}} = \overline{(p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ q)} =$$
$$= (p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ q)\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ (p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ q);$$
$$p \wedge q = \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} = \bar{p}\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ \bar{q} =$$
$$= (p\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ p)\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ (q\ \textbf{НЕ–ИЛИ}\ q).$$

Полнота функций {**НЕ-ИЛИ**} доказана.

Задача 17.

Изобразите карту Карно булева выражения с дизъюнктивной нормальной формой

$$\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee pqr$$

И найдите его упрощенную версию.

Решение:

Карта Карно выражения $\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee pqr$

	pq	$\bar{p}q$	$\bar{p}\bar{q}$	$p\bar{q}$
r	1	1	1	
$\bar{r}$	1			

Она имеет две пары соседних единиц. Поэтому

$$\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee pq\bar{r} \vee pqr = (\bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}qr) \vee (pq\bar{r} \vee pqr) =$$
$$= \bar{p}r(\bar{q} \vee q) \vee pq(\bar{r} \vee r) =$$
$$= \bar{p}r \vee pq.$$

Задача 18.

Найдите дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $f(p, q, r)$ со следующей таблицей истинности

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Изобразите ее карту Карно и упростите функцию *f*.

Решение:

$f = \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee pqr$. Карта Карно функции *f* представлена ниже

	pq	$\bar p q$	$\bar p\bar q$	$p\bar q$
r	1			1
$\bar r$		1	1	

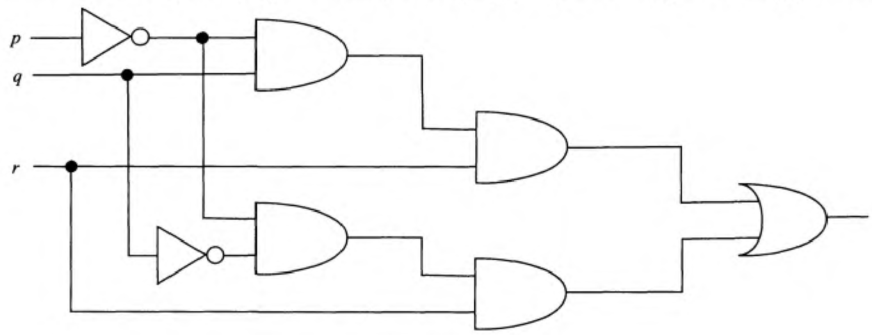
На рисунке легко заметить только одну пару соседних единиц. Однако их две (одна не видна при таком обозначении столбцов). Упрощение соответствующих пар минтермов дает:

$$\bar p\bar q\bar r \vee \bar p q\bar r = \bar p\bar r \qquad \text{и} \qquad p\bar q r \vee pqr = pr.$$

Окончательно имеем: $f = \bar p\bar r \vee pr$.

Задача 19.

Вычислите булеву функцию, генерируемую следующей функциональной схемой.



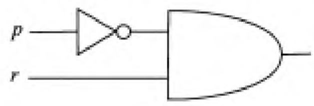
Используя карту Карно, найдите эквивалентную схему, состоящую из дух функциональных элементов: **И** и **НЕ.**

Решение:

Функциональная схема генерирует функцию $\bar p q r \vee \bar p\bar q r$. Ее карта Карно будет

	pq	$\bar p q$	$\bar p\bar q$	$p\bar q$
r		1	1	
$\bar r$				

Упрощая это выражение, получаем $\bar p r$. Новая функциональная схема будет



Задача 20.

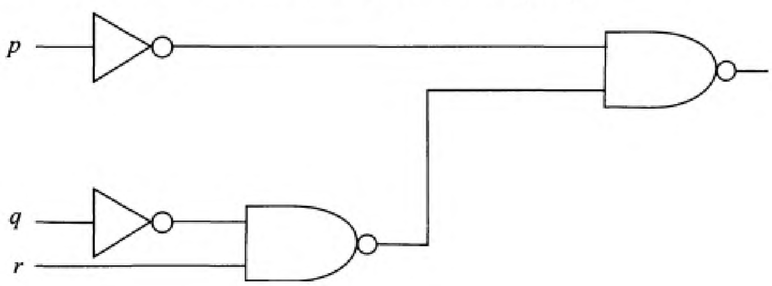
С помощью законов булевой алгебры проверьте, что выражение

$$\bar p \textbf{ НЕ–И } (\bar q \textbf{ НЕ–И } r)$$

эквивалентно выражению

$$p \vee (\bar q \wedge r).$$

Затем замените функциональную схему на эквивалентную ей, но состоящую из двух функциональных элементов: **И** и **ИЛИ** и одного инвертора.

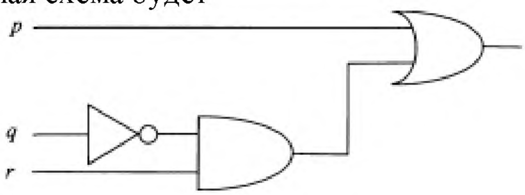


Решение:

Последовательность преобразований доказывает требуемую эквивалентность:

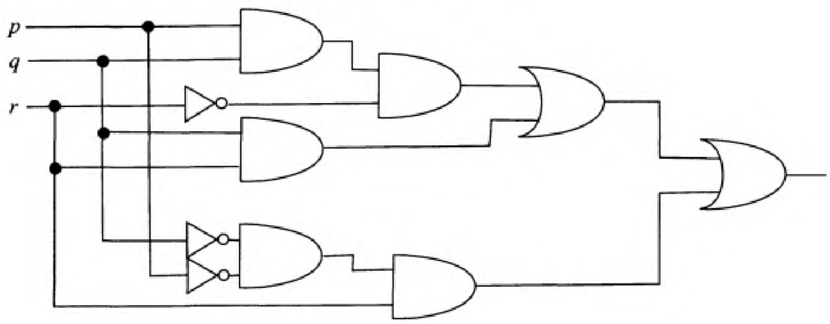
$$\begin{aligned}\bar p \textbf{ НЕ–И } (\bar q \textbf{ НЕ–И } r) &= \bar p \textbf{ НЕ–И } \overline{(\bar q \wedge r)} = \\ &= \bar p \textbf{ НЕ–И } (q \vee \bar r) = \\ &= \overline{(\bar p \wedge (q \vee \bar r))} = \\ &= p \vee \overline{(q \vee \bar r)} = \\ &= p \vee (\bar q \wedge r).\end{aligned}$$

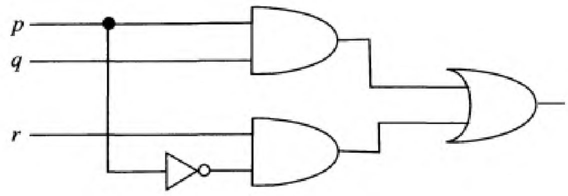
Искомая функциональная схема будет



Задача 21.

Докажите эквивалентность функциональных схем





Решение:

Первая из функциональных схем генерирует функцию $\bar p \bar q r \vee pq\bar r \vee qr$, которая равна функции $\bar p \bar q r \vee pq\bar r \vee pqr \vee \bar p qr$, поскольку $qr = (p \vee \bar p)qr$.

Вторая схема генерирует функцию $\bar p r \vee pq$. Отсюда следует, что

$$\bar p r \vee pq = \bar p \bar q r \vee pq\bar r \vee pqr \vee \bar p qr.$$

Таким образом, эти схемы генерируют равные функции, т.е. они эквивалентны.

Задача 22.

Начертите функциональную схему выражения p **НЕ–ИЛИ** q, используя только функциональный элемент **НЕ-И**.

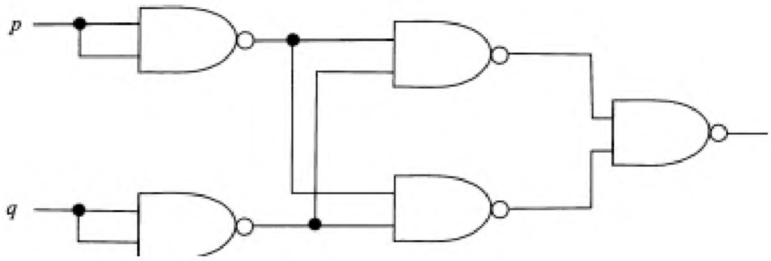
(Указание: начните с проверки соотношения $q \textbf{ НЕ–ИЛИ } q = \overline{(\bar p \textbf{ НЕ–И } \bar q)}$, а затем убедитесь, что любая булева переменная r удовлетворяет тождеству $\bar r = r \textbf{ НЕ–И } r$.)

Решение:

Следуя указанию к задаче, получаем

$$\begin{aligned}p \textbf{ НЕ–ИЛИ } q &= \overline{(p \vee q)} = \bar p \wedge \bar q = \overline{\overline{(\bar p \wedge \bar q)}} = \overline{(\bar p \textbf{ НЕ–И } \bar q)} = \\ &= \big((p \textbf{ НЕ–И } p) \textbf{ НЕ–И } (q \textbf{ НЕ–И } q)\big) \textbf{ НЕ–И} \\ &\textbf{НЕ–И } \big((p \textbf{ НЕ–И } p) \textbf{ НЕ–И } (q \textbf{ НЕ–И } q)\big).\end{aligned}$$

Требуемая схема будет



Тема 2.1. Основы теории множеств.

Задача 1.

Найдите более простое описание множеств, перечисляющее их элементы.

а) A={x: x –целое и $x^2+4x=12$};

б) B={ x: x – название дня недели, не содержащее буквы «е»};

в) C={n^2: n –целое}.

Решение:

а) Если $x^2+4x=12$, то $x(x+4)=12$. Поскольку x - целое число, делящее 12, то оно может быть равно только $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6$ и ± 12. С другой стороны, $(x+4)$ тоже делит 12. Поэтому остается только два значения: x= -6 или x=2.

Следовательно, A={-6, 2}.

б) B={вторник, пятница, суббота}.

в) C={0, 1, 4, 9, 16, …}.

Задача 2.

Пусть A={n: n^2 – нечетное целое число} и B={n: n – нечетное целое число}.

Показать, что A=B.

Решение:

Если $x \in A$, то x^2 - нечетное число. Отсюда вытекает, что само число x – целое и нечетное. Следовательно, $x \in B$, т.е. $A \subset B$.

В обратную сторону, пусть $x \in B$. Тогда x – нечетное целое число. В этом случае, x^2 тоже будет нечетным целым числом, а значит, $x \in A$. В виду произвольности взятого элемента $x \in B$, мы можем утверждать, что все элементы из B принадлежат A, т.е. $B \subset A$. Итак, A=B.

Задача 3.

Пусть

$$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}; \quad B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}; \quad C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

Найдите $A \cup C,\ B \cap C,\ A \setminus C$ и $B \vartriangle C$.

Решение:

$$A \cup C = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 2,\ 4\};$$

$$B \cap C = \{2,\ 4\};$$

$$A \setminus C = \{7\};$$

$$B \vartriangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{6,\ 8\} \cup \{1,\ 3,\ 5\} = \{6,\ 8,\ 1,\ 3,\ 5\}.$$

Задача 4.

Пусть

$$A = \{x:\ 1 \leqslant x \leqslant 12 \text{ и } x \text{ четное целое число}\},$$
$$B = \{x:\ 1 \leqslant x \leqslant 12 \text{ и } x \text{ целое число, кратное } 3\}.$$

Убедитесь, что $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Решение:

Прежде всего заметим, что универсальным множеством здесь служит

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}.$$

Кроме того,

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\} \quad \textbf{и} \quad B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}.$$

Поэтому

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{\{6,\ 12\}} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$$

и

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\} \cup \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11\} =$$
$$= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}.$$

Следовательно, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Задача 5.

Докажите, что для любых множеств А и В имеет место соотношение: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\overline{(A \cap B)} &= \{x:\ x \notin (A \cap B)\} = \\ &= \{x:\ \textbf{не}\ (x \in (A \cap B))\} = \\ &= \{x:\ \textbf{не}\ ((x \in A)\ \textbf{и}\ (x \in B))\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A} \cup \overline{B} &= \{x:\ (x \notin A)\ \textbf{или}\ (x \notin B)\} = \\ &= \{x:\ (\textbf{не}\ (x \in A))\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ (x \in B))\}.\end{aligned}$$

Сравнивая таблицы истинности, легко установить логическую эквивалентность составных предикатов:

$$\textbf{не}\ (P\ \textbf{и}\ Q) \quad \text{и} \quad (\textbf{не}\ P)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ Q),$$

Где P и Q – простые высказывания. Опираясь теперь на соответствие между логическими операциями и операциями над множествами, можно увидеть, что предикат $\textbf{не}\ (P\ \textbf{и}\ Q)$ соответствует множеству $\overline{(A \cap B)}$, а $(\textbf{не}\ P)\ \textbf{или}\ (\textbf{не}\ Q)$ - множеству $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Следовательно, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Задача 6.

Опираясь на законы алгебры множеств, докажите, что произвольные множества А и В удовлетворяют свойству:

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}.$$

Решение:

Напомним определение симметрической разности множеств:

$$A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Согласно законам алгебры множеств, имеем.

$(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} =$	(з. де Моргана)
$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) =$	(з. дистрибутивн.)
$= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) =$	(з. коммутативн.)
$= (\overline{A} \cap (A \cup B)) \cup (\overline{B} \cap (A \cup B)) =$	(з. дистрибутивн.)
$= ((\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup ((\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)) =$	(з. коммутативн.)
$= ((A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})) =$	(з. дополнения)
$= (\varnothing \cup (B \cap \overline{A})) \cup ((A \cap \overline{B}) \cup \varnothing) =$	(з. коммутативн. и тождества)
$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$	

Следовательно,

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

Как и утверждалось.

Задача 7.

Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности, и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

Решение

Введем обозначения.

A={студенты, слушающие курс бухгалтерии};

B={студенты, слушающие курс коммерческой деятельности}.

Тогда

$$|A| = 16, \qquad |B| = 37, \qquad |A \cap B| = 5.$$

Поэтому,

$$|A \cup B| = 16 + 37 - 5 = 48.$$

Следовательно, 63-48=15 студентов не посещают дополнительных курсов.

Задача 8.

Пусть A={x, y} и B={1, 2, 3}. Найдите декартовы произведения: $A \times B$, $B \times A$ и $B \times B$.

Решение

Прямым произведением $A \times B$ является множество

$$\{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

Прямое произведение $B \times A$ - это

$$\{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}.$$

Заметим, что множества $A \times B$ и $B \times A$ различны! Прямым произведением $B \times B$ служит множество

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Можно предположить, что мощность прямого произведения конечных множеств A и B равна

$$|A \times B| = mn, \quad \text{если } |A| = m \text{ и } |B| = n.$$

Если же одно из них или сразу оба бесконечны, то и произведение будет иметь бесконечное число упорядоченных пар.

Задача 9.

Пусть B={0, 1}. Опишите множество B^n.

Решение.

Множество B состоит из последовательностей нулей и единиц длины n. Они называются строкой бит или битовой строкой длины n.

Задача 10.

Пусть S={1, 2, 3, 4, 5}, A={1, 3, 5} и B={3, 4}. Выписать характеристические векторы A и B, а затем определить характеристические векторы множеств $A \cup B$, $A \cap B$ и $\overline{B}$.

Решение.

Нетрудно заметить, что характеристическим вектором множества A является a=(1, 0, 1, 0, 1), а характеристический вектор B равен b=(0, 0, 1, 1, 0). Значит,

$$a \textbf{ или } b = (1, 0, 1, 0, 1) \textbf{ или } (0, 0, 1, 1, 0) = (1, 0, 1, 1, 1);$$

$$a \textbf{ и } b = (1, 0, 1, 0, 1) \textbf{ и } (0, 0, 1, 1, 0) = (0, 0, 1, 0, 0);$$

$$\textbf{не } b = \textbf{не } (0, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 0, 0, 1).$$

Полученные векторы позволяют нам «без запинки прочитать» элементы требуемых подмножеств: $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$ и $\overline{B} = \{1, 2, 5\}$.

Задача 11.

а) Перечсилите элементы следующих множеств:

$$A = \{x:\ x \in \mathbb{Z} \text{ и } 10 \leqslant x \leqslant 17\};$$
$$B = \{x:\ x \in \mathbb{Z} \text{ и } x^2 < 24\};$$
$$C = \{x:\ x \in \mathbb{Z} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\};$$
$$D = \{x:\ x \in \mathbb{R} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\}.$$

Указание: $6x^2 + x - 1 = (3x - 1)(2x + 1)$.

б) Определите с помощью предикатов следующие множества:

$S = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$;

$T = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \ldots\}$.

Решение.

а)

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$;
$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;
$C = \varnothing$;
$D = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$;

б)

$S = \{3n - 1:\ n \in \mathbb{N}\}$;
$T = \{1/(2^n - 1):\ n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 12.

В качестве универсального множества данной задачи зафиксируем U={p, q, r, s, t, u, v, w}. Пусть A={p, q, r, s}, B={r, t, v} и C={p, s, t, u}. Найдите элементы следующих множеств:

а) $B \cap C$;
б) $A \cup C$;
в) $\overline{C}$;
г) $A \cap B \cap C$;
д) $(A \cup B) \cap (A \cap C)$;
е) $\overline{(A \cup B)}$;
ж) $B \setminus C$;
з) $B \,\Delta\, C$.

Решение.

а) {t}
б) {p, q, r, s, t, u}
в) {q, r, v, w}
г) $\varnothing$;
д) {p, s}
е) {u, w}
ж) {r, v}
з) {p, r, s, u, v}

Задача 13.

Рассмотрим подмножества стандартного словаря русского языка.

A={x: x – слово, стоящее перед «собака»};
B={x: x – слово, стоящее после «кошка»};
C={x: x – слово, содержащее двойную букву}.

Выясните, какие из следующих высказываний истинны:

а) $C \subset A \cup B$;

б) «бассейн» $\in \overline{B} \cap C$;

в) «стресс» $\in B \vartriangle C$;

г) $A \cap B = \varnothing$.

Опишите на словах элементы следующих множеств:

д) $A \cap B \cap C$;

е) $(A \cup B) \cap \overline{C}$.

Решение.

а) Истинно, поскольку $A \cup E$ состоит из всех слов словаря.

б) Истинно, так как слово «бассейн» стоит перед словом «кошка» и тем самым не содержится в В; кроме того, данное слово имеет двойную букву «с».

в) Ложно, так как симметрическую разность $B \vartriangle C$ можно записать как $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$, с слово «стресс» принадлежит как множеству В, так и С, т.е. оно лежит в их пересечении.

г) Ложно, ибо в словаре русского языка между словами «кошка» и «собака» сожержится немало других слов.

д) Слова словаря, находящиеся между словами «кошка» и «собака» и имеющие двойную букву.

е) Все слова словаря, несодержащие двойную букву.

Задача 14.

Рассмотрим подмножества целых чисел:

$A = \{3n: \ n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geqslant 4\}$;

$B = \{2n: \ n \in \mathbb{Z}\}$;

$C = \{n: \ n \in \mathbb{Z} \text{ и } n^2 \leqslant 100\}$.

а) Используя операции на множествах, выразите следующие подмножества через A, B и C:

i) множество всех нечетных чисел;

ii) {-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10};

iii) $\{6n: \ n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geqslant 2\}$;

iv) {-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9}.

б) Запишите определение множества A\B в предикатах.

Решение.

а)

i) $\overline{B}$;

ii) $B \cap C$;

iii) $A \cap B$;

iv) $C \setminus B$.

б) $A \setminus B = \{3n: \ n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geqslant 4, \text{ и } n \text{— нечетно}\}$.

Задача 15.

Нарисуйте серию диаграмм Венна, иллюстрирующих закон дистрибутивности:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Докажите, что закон действительно справедлив для любых множеств A, B и C.

Решение.

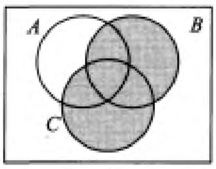
Соответствующие диаграммы Венна приведены ниже.

Если $x \in A \cap (B \cup C)$, то $x \in A$ **и** $((x \in B)$ **или** $(x \in C))$.

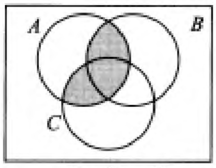
Следовательно,

$$((x \in A) \textbf{ и } (x \in B)) \textbf{ или } ((x \in A) \textbf{ и } (x \in C)).$$

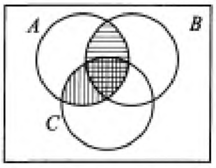
Иными словами, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Отсюда вытекает истинность включения: $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Обратное включение проверяется аналогично.



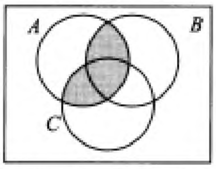
$B \cup C$



$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$ - горз. штриховка
$A \cap C$ - верт. штриховка



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

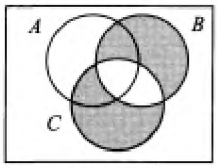
Задача 16.

Нарисуйте серию диаграмм Венна, иллюстрирующих следующее тождество:

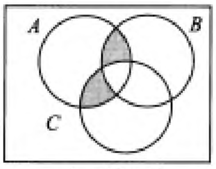
$$A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C).$$

Покажите на примере, что множество $A \cup (B \vartriangle C)$ не обязательно совпадает с множеством $(A \cup B) \vartriangle (A \cup C)$.

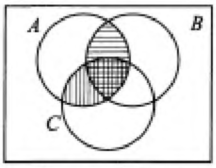
Решение.



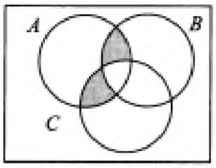
$B \vartriangle C$



$A \cap (B \vartriangle C)$



$A \cap B$ - горз. штриховка
$A \cap C$ - верт. штриховка



$(A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$

Любой набор множеств A, B, C, в котором множество A не содержит элементов не из B, не из C, противоречит равенству $A \cup (B \vartriangle C) = (A \cup B) \vartriangle (A \cup C)$.

В частности, пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ и $C = \{4, 5\}$. Тогда

$$B \vartriangle C = \{3, 5\} \quad \text{и} \quad A \cup (B \vartriangle C) = \{1, 2, 3, 5\}.$$

С другой стороны,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$$

и

$$(A \cup B) \vartriangle (A \cup C) = \{3, 5\}.$$

Задача 17.

Докажите с помощью законов алгебры множеств следующие тождества:

а) $\overline{(A \cap \overline{B})} \cup B = \overline{A} \cup B$;

б) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{(B \cup C)})} = A \cup B \cup C$;

в) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \varnothing$;

г) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

д) $A \vartriangle A \vartriangle A = A$.

Решение.

а) выполним преобразования:

$$\overline{(A\cap\overline{B})}\cup B = (\overline{A}\cup B)\cup B = \quad \text{(з. де Моргана и дополн.)}$$
$$= \overline{A}\cup(B\cup B) = \quad \text{(з. ассоциативности)}$$
$$= \overline{A}\cup B \quad \text{(з. идемпотентности)}$$

б) Воспользуемся законами алгебры множеств:

$$\overline{(\overline{A}\cap\overline{(B\cup C)})} = A\cup(B\cup C) = \quad \text{(з. де Моргана и дополн.)}$$
$$= A\cup B\cup C \quad \text{(следствие з. ассоциативности)}$$

в) Опираясь на законы коммутативности и ассоциативности, имеем

$$(A\cup B\cup C)\cap(A\cup\overline{B}\cup C)\cap\overline{(A\cup C)} =$$
$$= \big((B\cup(A\cup C)\big)\cap\big(\overline{B}\cup(A\cup C)\big)\cap\overline{(A\cup C)}.$$

Учитывая дистрибутивность, получаем

$$\big((B\cup(A\cup C)\big)\cap\big(\overline{B}\cup(A\cup C)\big)\cap\overline{(A\cup C)} =$$
$$= \big((B\cap\overline{B})\cup(A\cup C)\big)\cap\overline{(A\cup C)}.$$

Теперь применяем закон дополнения.

$$\big((B\cap\overline{B})\cup(A\cup C)\big)\cap\overline{(A\cup C)} = \big(\varnothing\cup(A\cup C)\big)\cap\overline{(A\cup C)}.$$

По законам тождества и дополнения приходим к окончательному ответу:

$$\big(\varnothing\cup(A\cup C)\big)\cap\overline{(A\cup C)} = (A\cup C)\cap\overline{(A\cup C)} = \varnothing.$$

г) Сделаем преобразования:

$$(A\setminus B)\setminus C = (A\cap\overline{B})\setminus C = \quad \text{(по определению «\textbackslash»)}$$
$$= (A\cap\overline{B})\cap\overline{C} = \quad \text{(по определению «\textbackslash»)}$$
$$= A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) = \quad \text{(ввиду ассоциативности)}$$
$$= A\cap\overline{(B\cup C)} = \quad \text{(з. де Моргана и дополн.)}$$
$$= A\setminus(B\cup C) \quad \text{(по определению «\textbackslash»)}$$

д) Учитывая определение симметрической разности и законы алгебры множеств, получаем:

$$A\vartriangle A = (A\setminus A)\cup(A\setminus A) = \quad \text{(по определению «}\Delta\text{»)}$$
$$= (A\setminus A) = \quad \text{(по з. идемпотентности)}$$
$$= A\cap\overline{A} = \quad \text{(по определению «\textbackslash»)}$$
$$= \varnothing \quad \text{(по з. дополнения)}$$

Следовательно, $A\vartriangle A\vartriangle A = A\vartriangle\varnothing =$

$$= (A\setminus\varnothing)\cup(\varnothing\setminus A) = \quad \text{(по определению «}\Delta\text{»)}$$
$$= (A\cap\overline{\varnothing})\cup(\varnothing\cap\overline{A}) = \quad \text{(по определению «\textbackslash»)}$$
$$= A\cup\varnothing = \quad \text{(по з. дополнения, коммутат. и тожд.)}$$
$$= A$$

Задача 18.

Определим «*» по формуле: $A * B = \overline{(A \cap B)}$.

Изобразите на диаграмме Венна множество А*В. С помощью законов алгебры множеств докажите тождества:

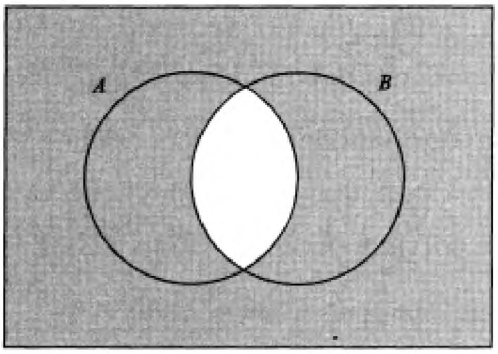
а) $A * A = \overline{A}$;

б) $(A * A) * (B * B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap \overline{(A \cup C)} = \varnothing$;

г) $(A * B) * (A * B) = A \cap B$.

Решение.



а) По определению операции «*» и закону идемпотентности получаем:

$$A * A = \overline{(A \cap A)} = \overline{A}.$$

б) Учитывая предыдущий пункт задачи, воспользуемся определением операции «*», а затем применим законы де Моргана и дополнения.

$$(A * A) * (B * B) = \overline{A} * \overline{B} = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B.$$

в) Аналогичные соображения помогают решить и последний пункт задачи.

$$\begin{aligned}(A * B) * (A * B) &= \overline{(A * B)} = \\ &= \overline{(\overline{(A \cap B)})} = \\ &= A \cap B.\end{aligned}$$

Задача 19.

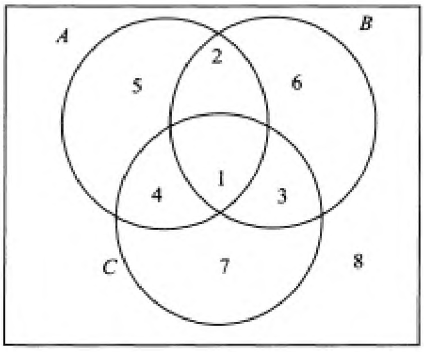
а) Покажите с помощью диаграмм Венна, что любые множества А, В и С удовдлетворяют соотношению:

$$\begin{gathered}|A \cup B \cup C| = \\ = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{gathered}$$

б) Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое – туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительных курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

Решение.

а)



Обозначим различные области метками 1, 2, …, 8, как показано на рисунке, и предположим, что область i содержит n_i элементов. Тогда

$$\begin{aligned}&|A| + |B| + |C| = \\ &= (n_1 + n_2 + n_4 + n_5) + (n_1 + n_2 + n_3 + n_6) + \\ &\quad + (n_1 + n_3 + n_4 + n_7) = \\ &= 3n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + n_5 + n_6 + n_7.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}&|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| = \\ &= (n_1 + n_2) + (n_1 + n_3) + (n_1 + n_4) = \\ &= 3n_1 + n_2 + n_3 + n_4.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$|A \cap B \cap C| = n_1.$$

Следовательно,

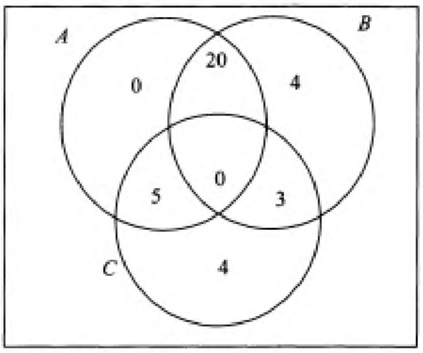
$$\begin{aligned}&|A| + |B| + |C| - \\ &\quad - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ &= 3n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + n_5 + n_6 + n_7 - \\ &\quad - 3n_1 - n_2 - n_3 - n_4 + n_1 = \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = \\ &= |A \cup B \cup C|,\end{aligned}$$

Что и утверждалось.

б) Обозначим через А множество студентов, изучающих бухгалтерию, через В – множество студентов, слушающих курс бизнеса, а через С – множество студентов, занимающихся туризмом. Из условия задачи и предыдущего пункта следует, что

$$|A \cup B \cup C| = 25 + 27 + 12 - 20 - 5 - 3 = 36.$$

Итак, 36 студентов посещают хотя бы одтин дополнительный курс. Изобразим схематически множества студентов



Из рисунка видно, что четверо из студентов посещали исключительно лекции по туризму.

Можно предложить более аккуратное решение этой задачи. Следуя введенным обозначениям, нам достаточно подсчитать мощность множества $C\setminus(A\cup B)$, поскольку в него входят студенты, изучающие на бухгалтерию, ни бизнес. Для начала заметим, что множество С можно представить в виде объединения непересекающихся множеств:

$$C = (C \setminus A) \cup (C \cap A).$$

Поэтому

$$|C| = |C \setminus A| + |C \cap A|.$$

Из условия задачи нам известно, что $|C| = 12$ и $|C \cap A| = 5$. Значит, |C\A|=12-5=7. Теперь нужно обратить внимание на то, что к множеству C\A относятся студенты, изучающие туризм, но не посещающие бухгалтерию. Однако в множестве C\A могут остаться студенты, которые кроме туризма изучают еще и бизнес. Выбросив их, мы получим искомое множество: (C\A)\B. Для подсчета его мощности применим то же прием.

$$|(C \setminus A) \setminus B| = |C \setminus A| - |(C \setminus A) \cap B|.$$

Самое трудное здесь вычислять мощность множества $(C \setminus A) \cap B$. К нему относятся те элементы множества С, которые принадлежат В, но не принадлежат А. Но по условию задачи любой элемент из С, принадлежащий В, не может принадлежать А, так кА все три множества общих элементов не имеют. Значит,

$$(C \setminus A) \cap B = C \cap B \Rightarrow \left|(C \setminus A) \cap B\right| = \left|C \cap B\right| = 3.$$

Окончательный ответ: 12-5=4.

Задача 20.

Что можно сказать о непустых множествах А и В, если имеет место равенство $A \times B = B \times A$?

Непустые множества А, В и С удовлетворяют соотноешнию $A \times B = A \times C$. Следует ли отсюда, что В=С? Объясните ответ.

Решение.

Элементы прямого произведения $A \times B$ имеют вид (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. Если $A \times B = B \times A$, то пара (a, b) из множества $A \times B$ должна принадлежать и $B \times A$, т.е. $a \in B$ и $b \in A$. Поскольку это верно для любого $a \in A$ и любого $b \in B$, мы имеем равенство множеств А=В.

Множество $A \times C$ состоит из упорядоченных пар (a, c), в которых $a \in A$ и $c \in C$. Если $A \times B = A \times C$, то $(a, c) \in A \times B$, откуда $c \in B$. Это нам дает включение: $C \subset B$. меняя в нашем рассуждении множества В и С местами, можно увидеть, что $B \subset C$. Следовательно, В=С.

Задача 21.

Пусть А, В и С – произвольные множества. Докажите, что

а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Решение.

а) Пусть $x \in A \times (B \cap C)$. Тогда $x = (a, t)$, где $a \in A$ и $t \in (B \cap C)$. Следовательно, $t \in B$, т.е. $(a, t) \in A \times B$ и, одновременно, $t \in C \Rightarrow (a, t) \in A \times C$. Значит, $(a, t) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Иными словами,

$$A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C).$$

И наоборот. Если $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$, то $x \in A \times B$ и $x \in A \times C$. Следовательно, $x = (a, t)$, причем $a \in A$, а t принадлежит как В, так и С, т.е. $t \in B \cap C$. Таким образом, $x \in A \times (B \cap C)$. Этим рассуждением мы доказали обратное включение: $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$. Из доказанного вытекает требуемое равенство множеств.

б) Пусть $x \in (A \cup B) \times C$. Тогда $x = (s, c)$, где $s \in (A \cup B)$ и $c \in C$. Поскольку s-элемент объединения, то либо $s \in A$, и тогда $x \in A \times C$, либо $s \in B$, т.е. $x \in B \times C$. В любом случае х принадлежит либо $A \times C$, либо $B \times C$.

Значит, $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

И наоборот. Если $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$, то он представляется в виде x=(s, c), где $c \in C$, а s лежит либо в множестве A, либо в множестве B. Иными словами, $s \in (A \cup B)$. Таким образом, $x = (s, c) \in (A \cup B) \times C$. Ввиду произвольности x можно заключит, что

$$(A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C.$$

Из двух включений следует нужное равенство множеств.

Задача 22.

Показательным множеством $\mathcal{P}(A)$ называется множество, элементами которого являются подмножества множества A. Иначе говоря, $\mathcal{P}(A) = \{C : C \subset A\}$.

а) Найдите $\mathcal{P}(A)$, если A={1, 2, 3}.

б) Докажите, что $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ для любых множеств A и B.

в) Покажите на примере, что $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ не всегда совпадает с $\mathcal{P}(A \cup B)$.

Решение.

а) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

б) Пусть $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Тогда $C \subset A$ и $C \subset B$, поэтому $C \subset (A \cap B)$. Следовательно, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$. Теперь возьмем $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Тогда $C \subset (A \cap B)$, т.е. $C \subset A$ и $C \subset B$. Значит, $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Отсюда вытекает равенство $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

в) Элементами объединения $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ являются подмножества, лежащие в A, и подмножества, лежащие в B. Следовательно, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Обратного же включения нет, поскольку подмножество объединения $A \cup B$ не обязательно целиком содержится либо в A, либо в B. Пусть, например, A={1, 2, 3}, B={4, 5}, C={1, 2, 5}. Тогда, конечно, $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$, но, очевидно, $C \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Задача 23.

Пусть U={1, 2, 3, 4, 5, 6} – универсальное множество. Выпишите характеристические векторы подмножеств:

A={1, 2, 4, 5} и B={3, 5}.

Найдите характеристические векторы подмножеств $A \cup \overline{B}$ и $A \Delta B$, после чего перечислите их элементы.

Решение.

Характеристическим вектором множества A является вектор a=(1, 1, 0, 1, 1, 0). Характеристический вектор множества B равен b=(0, 0, 1, 0, 1, 0).

Вычислим характеристический вектор множества $A \cup \overline{B}$. Он равен

a или (не b) =(1, 1, 0, 1, 1, 0) или (1, 1, 0, 1, 0, 1) =(1, 1, 0, 1, 1, 1)

Следовательно, $A \cup \overline{B}$={1, 2, 4, 5, 6}.

Характеристический вектор множества $A \Delta B$ равен

(a и (не b)) или (b и (не a)) =((1, 1, 0, 1, 1, 0) и (1, 1, 0, 1, 0, 1)) или ((0, 0, 1, 0, 1, 0) и (0, 0, 1, 0, 0, 1)) = (1, 1, 0, 1, 0, 0) или (0, 0, 1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1, 1, 0, 0).

Таким образом, $A \Delta B$={1, 2, 3, 4}.

Тема 3.1. Теория предикатов.

Задача 1.

На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$, $P(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$. На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

- Формулы с одной свободной переменной *a*, истинные тогда и только тогда, когда *a*=0, *a*=1, *a*=2, *a* –четное число, *a* – нечетное число;

- Формулы с двумя свободными переменными a и b, истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a < b$, a делит b;
- Формулы с тремя свободными переменными a, b, c, истинные тогда и только тогда, когда a – наименьший общий делитель чисел b и c.

Решение.

$$a = 0 \Leftrightarrow \forall x\, S(a, x, x)$$

$$a = 1 \Leftrightarrow \forall x\, P(a, x, x)$$

$$a = 2 \Leftrightarrow \exists y(\forall x\, P(y, x, x) \wedge S(y, y, a))$$

$$a \text{ — чётное число } \Leftrightarrow \exists x\, S(x, x, a)$$

$$a \text{ — нечётное число } \Leftrightarrow \neg\exists x\, S(x, x, a)$$

$$a = b \Leftrightarrow \exists y(\forall x\, S(y, x, x) \wedge S(a, y, b))$$

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x\, S(a, x, b)$$

$$a \text{ делит } b \Leftrightarrow \exists x\, P(a, x, b)$$

$$a \text{ — наименьшее общее кратное чисел } b \text{ и } c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x\, P(b, x, a) \wedge \exists x\, P(c, x, a) \wedge \forall y(\exists x\, P(b, x, y) \wedge \exists x\, P(c, x, y) \rightarrow \exists x\, P(a, x, y))$$

$$a \text{ — наибольший общий делитель чисел } b \text{ и } c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x\, P(a, x, b) \wedge \exists x\, P(a, x, c) \wedge \forall y(\exists x\, P(y, x, b) \wedge \exists x\, P(y, x, c) \rightarrow \exists x\, P(y, x, a))$$

Задача 2.

Доказать, что формула

$$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z(P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z)))$$

выполнима, но не выполнима ни в какой конечной модели.

Решение.

Формула выполнима, так как она истинна, например, в интерпретации (N, P), где $P(x, y) \Leftrightarrow x < y$. Докажем, что любая модель данной формулы бесконечна. Пусть интерпретация $\mathfrak{M} = (M, P)$ является моделью этой формулы. Тогда в $\mathfrak{M}$ истинны формулы

$$\forall x \exists y P(x, y), \qquad (1)$$

$$\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)), \qquad (2)$$

$$\forall x \forall y \forall z(P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z))). \qquad (3)$$

В силу истинности формулы (2)

$$P(m, m) \text{истинно для всех } m \in M. \qquad (4)$$

Так как предметная область M непуста, существует элемент $a_0 \in M$. В силу истинности формулы (1) существует такой элемент a_1, что истинно $P(a_0, a_1)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность a_0, a_1, … элементов множества M, где $P(a_i, a_{i+1})$ истинно для любого i. Все эти элементы различны. Действительно, в силу истинности формулы (3) $P(a_i, a_j)$ истинно, если i<j, а тогда $a_i \neq a_j$ в силу (4). Таким образом, множество M бесконечно.

Задача 3.

Привести к предваренной нормальной форме формулу

$$\neg\forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y).$$

Решение.

При приведении формул к предваренной нормальной форме используются следущие равносильности, где v – произвольная связанная переменная; A(a) и C(a) –

произвольные формулы; u – произвольная связанная переменная, не входящая в A(a); B – формула, не содержащая переменную v:

1) $\neg\forall v\, A(v) \equiv \exists v \neg A(v)$
2) $\neg\exists v\, A(v) \equiv \forall v \neg A(v)$
3) $\forall v\, A(v) \wedge B \equiv \forall v(A(v) \wedge B)$
4) $B \wedge \forall v\, A(v) \equiv \forall v(B \wedge A(v))$
5) $\exists v\, A(v) \wedge B \equiv \exists v(A(v) \wedge B)$
6) $B \wedge \exists v\, A(v) \equiv \exists v(B \wedge A(v))$
7) $\forall v\, A(v) \vee B \equiv \forall v(A(v) \vee B)$
8) $B \vee \forall v\, A(v) \equiv \forall v(B \vee A(v))$
9) $\exists v\, A(v) \vee B \equiv \exists v(A(v) \vee B)$
10) $B \vee \exists v\, A(v) \equiv \exists v(B \vee A(v))$
11) $\forall v\, A(v) \to B \equiv \exists v(A(v) \to B)$
12) $B \to \forall v\, A(v) \equiv \forall v(B \to A(v))$
13) $\exists v\, A(v) \to B \equiv \forall v(A(v) \to B)$
14) $B \to \exists v\, A(v) \equiv \exists v(B \to A(v))$
15) $\forall v\, A(v) \wedge \forall v\, C(v) \equiv \forall v(A(v) \wedge C(v))$
16) $\exists v\, A(v) \vee \exists v\, C(v) \equiv \exists v(A(v) \vee C(v))$
17) $\forall v\, A(v) \equiv \forall u\, A(u)$
18) $\exists v\, A(v) \equiv \exists u\, A(u)$
19) $\forall v\, B \equiv B$
20) $\exists v\, B \equiv B$

Приведение данной формулы к предваренной форме состоит в построении цепочки формул, каждая из которых получается из предыдущей применением одной из указанных равносильностей (ее номер указывается в индексе при $\equiv$).

$$\neg\forall x\forall y P(x,y) \vee \forall x\exists y Q(x,y) \equiv_1 \exists x\neg\forall y P(x,y) \vee \forall x\exists y Q(x,y) \equiv_1$$
$$\equiv_1 \exists x\exists y\neg P(x,y) \vee \forall x\exists y Q(x,y) \equiv_{19} \exists x\exists y\neg P(x,y) \vee \forall z\exists y Q(z,y) \equiv_9$$
$$\equiv_9 \exists x(\exists y\neg P(x,y) \vee \forall z\exists y Q(z,y)) \equiv_8 \exists x\forall z(\exists y\neg P(x,y) \vee \exists y Q(z,y)) \equiv_{16}$$
$$\equiv_{16} \exists x\forall z\exists y(\neg P(x,y) \vee Q(z,y))$$

Последняя формула является предваренной формулой, которая равносильна исходной формуле.

Задача 4.

Выразимы ли следующие предикаты в данных интерпретациях?

- $a = b,\ a = 0,\ a = 1,\ a = 2$ в $(\mathbf{N}, x \vdots y)$,
- $a = b,\ b = a + 1,\ c = a + b$ в $(\mathbf{Z}, <)$,
- $a = 0,\ a < b$ в $(\mathbf{Z}, +, =)$,
- $a = b,\ |a - b| = 2$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.

Решение.

Пусть P – такой двуместный предикат на N, что

$$P(a,b) \Leftrightarrow a \vdots b.$$

В интерпретации (N, P)

- Предикат a=b выразим формулой $P(a,b) \wedge P(b,a)$;
- Предикат a=0 выразим формулой $\forall x\, P(a,x)$; $a = 0$
- Предикат a=1 выразим формулой $\forall x\, P(x,a)$;
- Предикат a=2 невыразим, так как существует автоморфизмы φ данной интерпретации, не сохраняющий этот предикат. А именно, положим φ(0)=0, φ(1)=1, а для любого a>1, разложив его на простые множители, представим в виде $a=2^m \cdot 3^m \cdot c$, где c не делится на 2 и на 3, и положим $\varphi(a)= 2^m \cdot 3^m \cdot c$. Очевидно, что отображение φ является автоморфом, но не сохраняет предикат a=2, так как φ(2)= 3.

В интерпретации (Z, <)

- Предикат a=b выразим формулой $\neg(a < b \vee b < a)$;
- Предикат b=a+1 выразим формулой $\forall x(x < b \to \neg a < x)$;
- Предикат c=a+b невыразим, так как автоморфизм φ(a)=a+1 не сохраняет этот предикат.

В интерпретации (Z, +, =)

- Предикат a=0 выразим формулой $\forall x\, x + a = x$;
- Предикат a<b невыразим, так как автоморфизм φ(x)=-x не сохраняет этот предикат.

Пусть Q – такой двуместный предикат на R, что

$$Q(a,b) \Leftrightarrow |a-b| = 1.$$

В интерпретации (R, Q)

- Предикат a=b выразим формулой $\forall x(Q(x,a) \to Q(x,b))$;
- Предикат |a-b|=2 выразим формулой $\exists x(Q(x,a) \wedge Q(x,b)) \wedge \exists x(Q(x,a) \wedge \neg Q(x,b))$.

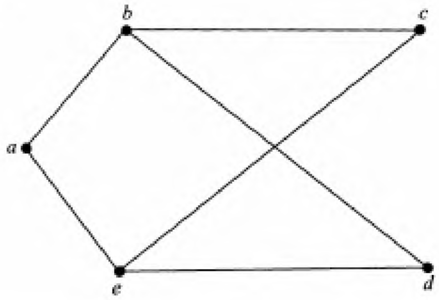
Тема 4.1. Основы теории графов

Задача 1.

Нарисуйте граф G(V, E) с множеством вершин V={a, b, c, d, e} и множеством ребер E={ab, ae, bc, bd, ce, de}. Выпишите его матрицу смежности.

Решение.

Граф G показан на рисунке



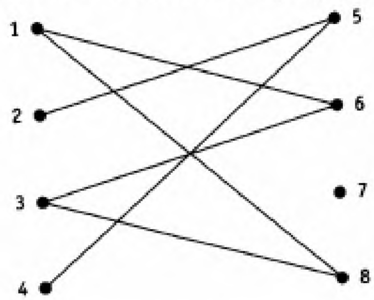
Его матрица имеет вид:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} Л & И & Л & Л & И \\ И & Л & И & И & Л \\ Л & И & Л & Л & И \\ Л & И & Л & Л & И \\ И & Л & И & И & Л \end{bmatrix} \end{array}.$$

Для восстановления графа нам достаточно только тех элементов марицы смежности, которые стоят над диагональю.

Задача 2.

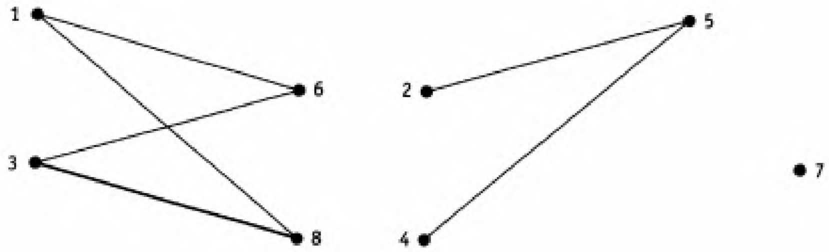
Проследите за работой алгоритма связности на графе, изображенном на рисунке



Решение.

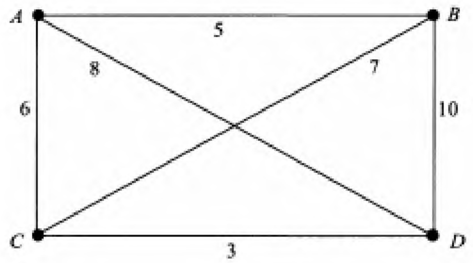
	V'	c
Исходные значения	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	0
Выбор y=1	{2, 4, 5, 7}	1
Выбор y=2	{7}	2
Выбор y=7	∅	3

Итак, c(G)=3. Соответствующие компоненты связности будут



Задача 3.

Примените алгоритм ближайшего соседа к графу, изображенному на рисунке. За исходную возьмите вершину D.



Решение.

		маршрут	w	v’
Исходные значения		D	0	D
		DC	3	C
		DCA	9	A
		DCAB	14	B
		DCABD	24	B
Последний проход				

В результате работы алгоритма был найден гамильтонов цикл DCABD общего веса 24. Делая полный перебор всех циклов в этом маленьком графе, можно обнаружить еще два других гамильтоновых цикла: ABCDA общего веса 23 и ACBDA общего веса 31. В полном графе с двадцатью вершинами существует приблизительно $6{,}1 \cdot 10^{16}$ гамильтоновых циклов, перечисление которых требует чрезвычайно много машинной памяти и времени.

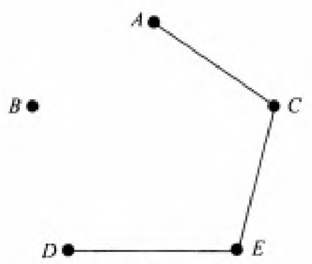
Задача 4.

В таблице дано расстояние (в милях) между пятью деревнями A, B, C, D и E. Найдите минимальное остовное дерево.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	—	13	3	9	9
B	13	—	11	11	13
C	3	11	—	9	7
D	9	11	9	—	2
E	9	13	7	2	—

Решение.

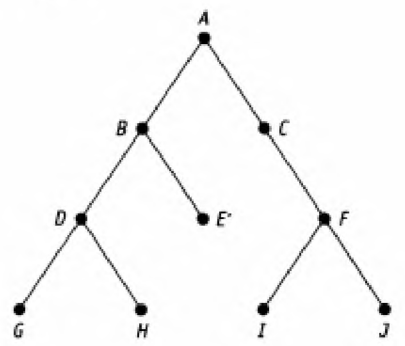
Ребра выбираются следующим образом: первое – ребро DE веса 2; второе – AC веса 3; третье – CE веса 7. На этой стадии строящееся дерево выглядит так



Следующие по весу ребра – AD, AE и CD, каждое из которых имеет вес 9. Однако какое бы из них мы ни добавили, получится цикл. Поэтому перечисленные ребра следует исключить из числа доступных для строительства. Далее идут ребра BC и BD веса 11. Можно присоединить любое из них, получив при этом два разных МОД: {AC, BC, CE, DE} или {AC, BD, CE, DE} веса 23 каждое.

Задача 5.

Пусть T- двоичное дерево с корнем



Определите

а) корень T;

б) корень левого поддерева вершины B;

в) листья T;

г) сыновей вершины C.

Нарисуйте двоичное дерево с корнем T', полученное из T перестановкой левых и правых поддеревьев у каждой вершины.

Решение.

а) A;

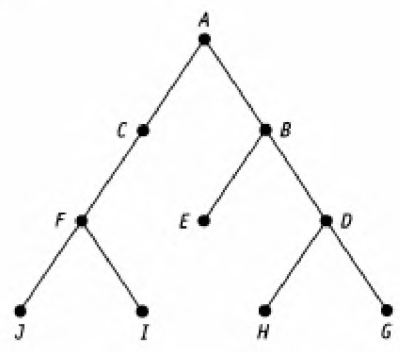
б) D;

в) G, H, E, I и J;

г) F.

Нарисуйте двоичное дерево с корнем T', полученное из T перестановкой левых и правых поддеревьев у каждой вершины.

Двоичное дерево с корнем T'



5.2.2. Примерная тематика докладов

Самостоятельная работа по теме 2.1. Основы теории множеств.

1. Множества и операции над ними;
2. Диаграмма Венна;
3. Основные свойства множеств;
4. Доказательство закона ассоциативности;
5. Доказательство закона коммутативности;
6. Доказательство закона тождества;
7. Доказательство закона идемпотентности;
8. Доказательство закона дистрибутивности;
9. Доказательство закона дополнения;
10. Доказательство закона де Моргана;
11. Формула включений и исключений;
12. Характеристический вектор.

Самостоятельная работа по теме 4.1. Основы теории графов.

1. Понятие графа с примерами;
2. Виды графов;
3. Лемма об эстафете;
4. Матрица смежности;
5. Задача коммивояжера;
6. Гамильтоновы графы;
7. Алгоритм ближайшего соседа;
8. Деревья;
9. Алгоритм поиска минимального остовного дерева;
10. Ориентированные графы;
11. Алгоритм топологической сортировки;
12. Пути в орграфах;
13. Алгоритм Уоршелла;
14. Кратчайший путь;
15. Алгоритм Дейкстры.

5.2.3. Типовые зачетные задания

Вариант 1

Задача 1. Обозначим через P высказывание: «розы красные», а через Q – «фиалки синие».Запишите каждое из высказываний:

а) если розы не красные, то фиалки не синие;

б) розы красные или фиалки не синие;

в) либо розы красные, либо фиалки синие (но не одновременно)

как логическое выражение.

Используя таблицы истинности, докажите логическую эквивалентность а) и б).

Задача 2.

Найдите дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $f = (p \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge r)$.

Задача 3.

Каждый из 63 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс бухгалтерии, 37 – курс коммерческой деятельности, и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

Вариант 2

Задача 1.

Пусть P, Q и R – определенные следующим образом высказывания:

P: Я умираю от жажды.

Q: Мой стакан пуст.

R: Сейчас три часа.

Запишите каждое из следующих высказываний как логическое выражение, включающее P, Q и R.

а) Я умираю от жажды и мой стакан пуст.

б) Сейчас три часа, а я умираю от жажды.

в) Если сейчас три часа, то я умираю от жажды.

г) Если я умираю от жажды, то мой стакан пуст.

д) Если я не умираю от жажды, то мой стакан не пуст.

Задача 2.

Функция **НЕ-И** определяется формулой: p **НЕ–И** $q = \overline{(p \wedge q)}$.

Покажите, что {**НЕ-И**} – полная система функций.

Задача 3.

Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое – туризм и бизнес. Известно, что никто из студентов не отважился посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительных курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?

Решения зачетных заданий.

Вариант 1

Задача 1.

а) (не P) ⇒ (не Q).

б) P или (не Q).

в) (P или Q) и (не (P и Q)).

P	Q	**не** P	**не** Q	P **или** (**не** Q)	((**не** P) ⇒ (**не** Q))
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних таблицы идентичны, высказывания а) и б) логически эквивалентны.

Задача 2.

В таблице запишем истинности функции *f*.

p	q	r	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Выпишем минтермы:

$$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r, \qquad p \wedge \bar{q} \wedge r, \qquad p \wedge q \wedge \bar{r}, \qquad p \wedge q \wedge r.$$

Следовательно, искомая дизъюнктивная нормальная форма:

$$f(p, q, r) = (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r).$$

Задача 3.

Введем обозначения.

A={студенты, слушающие курс бухгалтерии};

B={студенты, слушающие курс коммерческой деятельности}.

Тогда

$$|A| = 16, \qquad |B| = 37, \qquad |A \cap B| = 5.$$

Поэтому,

$$|A \cup B| = 16 + 37 - 5 = 48.$$

Следовательно, 63-48=15 студентов не посещают дополнительных курсов.

Вариант 2

Задача 1.

а) P и (не Q)

б) R и P

в) R ⇒ P

г) P ⇒ Q

д) (не P) ⇒ (не Q)

Задача 2.

Для решения задачи достаточно показать, что каждая из функций $\bar{p}$, $p \vee q$ и $p \wedge q$ может быть выражена через **НЕ-И.**

В виду закона идемпотентости

$$\bar{p} = \overline{(p \wedge p)} = p \textbf{ НЕ–И } p.$$

По закону де Моргана

$$p \vee q = \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})} = \overline{\big((p \textbf{ НЕ–И } p) \wedge (q \textbf{ НЕ–И } q)\big)} =$$

$$= (p \textbf{ НЕ–И } p) \textbf{ НЕ–И } (q \textbf{ НЕ–И } q).$$

Наконец,

$$p \wedge q = \overline{\overline{\big((p \wedge q)\big)}} = \overline{(p \textbf{ НЕ–И } q)} =$$

$$= (p \textbf{ НЕ–И } q) \textbf{ НЕ–И } (p \textbf{ НЕ–И } q).$$

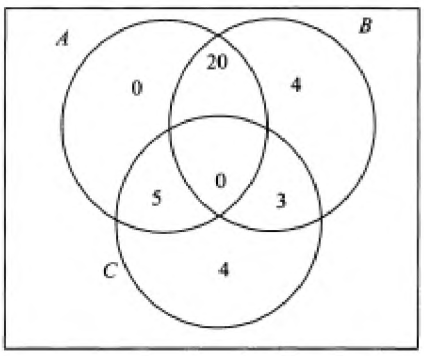
Итак, {**НЕ-И**} – действительно полная система операций.

Задача 3.

б) Обозначим через A множество студентов, изучающих бухгалтерию, через B – множество студентов, слушающих курс бизнеса, а через C – множество студентов, занимающихся туризмом. Из условия задачи и предыдущего пункта следует, что

$$|A \cup B \cup C| = 25 + 27 + 12 - 20 - 5 - 3 = 36.$$

Итак, 36 студентов посещают хотя бы один дополнительный курс. Изобразим схематически множества студентов



Следуя введенным обозначениям, нам достаточно подсчитать мощность множества $C \setminus (A \cup B)$, поскольку в него входят студенты, изучающие на бухгалтерию, ни бизнес. Для начала заметим, что множество С можно представить в виде объединения непересекающихся множеств:

$$C = (C \setminus A) \cup (C \cap A).$$

Поэтому

$$|C| = |C \setminus A| + |C \cap A|.$$

Из условия задачи нам известно, что $|C| = 12$ и $|C \cap A| = 5$. Значит, |С\А|=12-5=7. Теперь нужно обратить внимание на то, что к множеству С\А относятся студенты, изучающие туризм, но не посещающие бухгалтерию. Однако в множестве С\А могут остаться студенты, которые кроме туризма изучают еще и бизнес. Выбросив их, мы получим искомое множество: (С\А)\В. Для подсчета его мощности применим то же прием.

$$|(C \setminus A) \setminus B| = |C \setminus A| - |(C \setminus A) \cap B|.$$

Самое трудное здесь вычислять мощность множества $(C \setminus A) \cap B$. К нему относятся те элементы множества С, которые принадлежат В, но не принадлежат А. Но по условию задачи любой элемент из С, принадлежащий В, не может принадлежать А, так кА все три множества общих элементов не имеют. Значит,

$$(C \setminus A) \cap B = C \cap B \Rightarrow \left|(C \setminus A) \cap B\right| = \left|C \cap B\right| = 3.$$

Окончательный ответ: 12-5=4.

<u>Критерии оценивания зачета с оценкой:</u>

Процент результативности (правильных ответов)	**Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений**	
	балл (отметка)	**вербальный аналог**
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	не удовлетворительно